$(x+a)(x+b)$ を展開していくということは？

$$(x+a)(x+b)$$

① $x \times x = x^2$

② $x \times b = bx$

③ $a \times x = ax$

④ $a \times b = ab$

全部を足すと、$x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad ・・・(1)$$

ここで、『b も実は a だったとすれば』という特殊な場合を考えてみましょう。

同じように展開していくと、

$$(x+a)(x+a)$$

① $x \times x = x^2$

② $x \times a = ax$

③ $a \times x = ax$

④ $a \times a = a^2$

全部を足すと、$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$(x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2 \quad ・・・(2)$$

(1)の式で、b を a に置き換えてやると同じ式になりますね。

さて、ここで、$(x+a)(x+a)$のことは$(x+a)^2$と表現しようというルールを決めますよ。

すなわち、$(x+a)^2$とは、$(x+a)(x+a)$のこと。

すると、$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$・・・(2)

これを逆に書くと、$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$・・・(2')

(2')こそが、教科書に必ず出て来る因数分解の公式の筆頭頭なんですね。

では、符号が変わって、$(x-a)^2$となればどうなるでしょうか？

$(x-a)^2=\{x+(-a)\}^2$と考えれば、(2)の式をそのまま使うことができます。

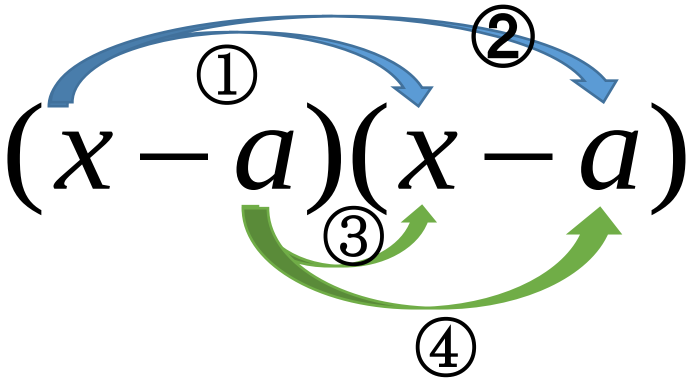
$$
\begin{aligned}
&(x-a)^2 \\
&=\{x+(-a)\}^2 \\
&=x^2+2(-a)x+(-a)^2 \\
&=x^2-2ax+a^2
\end{aligned}
$$

すなわち、$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$・・・(3)

逆に書くと、$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$・・・(3')

(3')も、教科書に必ず出て来る因数分解の公式の筆頭頭なんですね。

では、もともとの定義で確認しておきましょう！



これは、

②

①

$$\{x+(-a)\}\{x+(-a)\}$$

③

④

と同じことですね。

それぞれの計算を見てみましょう。

⑤　$x \times x = x^2$

⑥　$x \times (-a) = -ax$

⑦　$-a \times x = -ax$

⑧　$-a \times (-a) = a^2$

全部を足すと、$x^2 - ax - ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2$

どちらの書き方でも同じことになりますね。

なので、後の書き方を経由することなく、先の書き方のままで、
記号は記号の直前の符号ごと計算できるように習慣をつけてください。

ややこしくなった時や不安になった時は、後ろの考え方で確認すればいいのです。

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ・・・(2)と $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ ・・・(3)

は、教科書では展開の公式となっていると思いますが、公式と言うよりここまでにやった計算の手続きから、暗記しているのと大して差が無い時間ですぐに出てきます。

それに、しょっちゅう出て来る式だから使っている内には無意識に覚えていきます。
「2 つの項の和の 2 乗は、1 つ目の項の 2 乗、2 つの項をお互いに掛けた数の 2 倍、2 つ目の項の 2 乗、この 3 つを足した数になる」というようにね、必ず日本語で呟いてください。

即ち、ある程度問題をこなしていくと、この日本語の呟きが口につくことで覚えていくんですよ。
もちろん、三角関数の公式のような場合、記号のリズム感で覚えていくということもあることも頭に入れておいてくださいね。

それでは、$(x-1)^2$ を展開してみましょう。

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ です。

1 つ目の項 x の 2 乗、2 つの項 x と -1 をお互いに掛けた数の 2 倍、2 つ目の項 -1 の 2 乗
この 3 つを足した数になっていますね。

x の項が出て来る理由はここですね。

$2(x-1)^2$ は、$2(x-1)^2 = 2(x^2 - 2x + 1)$ というように丁寧に置き換えていかなければなりません。

よって、

$y = 2(x-1)^2 + 3$ は、

$$
\begin{aligned}
y &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\
&= 2x^2 - 4x + 2 + 3 \\
&= 2x^2 - 4x + 5
\end{aligned}
$$

$y = -(x+2)^2 - 2$

頂点を求めるためであれば、わざわざ展開する必要はありませんという意味で、

単に、$y = -\{x - (-2)\}^2 + (-2)$ と変形して書かれているだけです。

その理由は、

2 次関数を　$y = (x - p)^2 + q$　と表せたとき、頂点の座標は (p, q) である

という定理の表現にあります。

がーになっている理由は、頂点の座標を (p, q) の形で表現したいからなんです。

もし、$y = (x + p)^2 + q$ と表現すれば、頂点の座標は $(-p, q)$ と表現しなくちゃいけなくなり、生徒が混乱しちゃうかもという配慮があるのだと思いますよ。

ですから、この定理の表現に合わせて

$y=-(x+2)^2-2$ も $y=-\{x-(-2)\}^2+(-2)$ と書く練習をしているのですね。

それで、頂点の座標が $(-2,-2)$ になるんだよということの説明をしています。

でも、実際的に問題を解く場合は、いちいちこの形に直すのは面倒ですよね。
そこで、現実的には、

$y=(x+p)^2+q$ という形にさえ整理すれば、符号は気にすることなく

頂点の座標は、
　x 座標は $+p$ の逆符号：$-p$
　y 座標は $+q$ と逆符号：$+q$
と処理すれば、同じことをやっていることになるわけです。

$y=(x+p)^2+q$ を見て、放物線の頂点の座標は $(-p,q)$ と即座に反応できれば合格ですが、どうですか？

■もっと分かりやすくするためのおまけ

$(x+p)^2$ は 2 乗ですから、如何なる場合でも 0 かプラスの数になります。

ですから、一番小さいときは 0 ですね。

これに対応して、$y=(x+p)^2+q$ の一番小さいときは $y=0+q=q$ になります。

さて、$(x+p)^2$ が 0 になるのはどんな時でしょうか？

$x+p=0$ のときですね。
言い換えれば、$x=-p$ のときです。
$x=-p$ のとき、y は一番小さな値 $y=0+q=q$ をとる。

これが、放物線の頂点の正体です。

$(x+p)^2$ が 0 になるとき、y は最小値 q をとる。

こう考えれば、式の中にある符号を気にすることもなくなりますね。

では、
x が $-p$ よりも1だけ大きい数のときは、$x+p=1$ となり、
x が $-p$ よりも1だけ小さい数のときは、$x+p=-1$ となり、

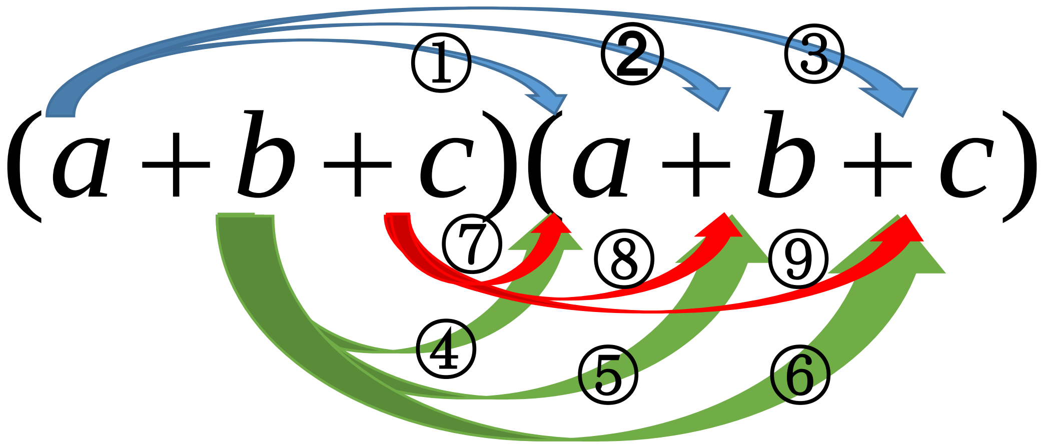
どちらも $(x+p)^2$ にしてみれば同じ $\pm1^2=1$ という値を取ります。

x が $-p$ よりも2だけ大きい数のときは、$x+p=2$ となり、
x が $-p$ よりも2だけ小さい数のときは、$x+p=-2$ となり、

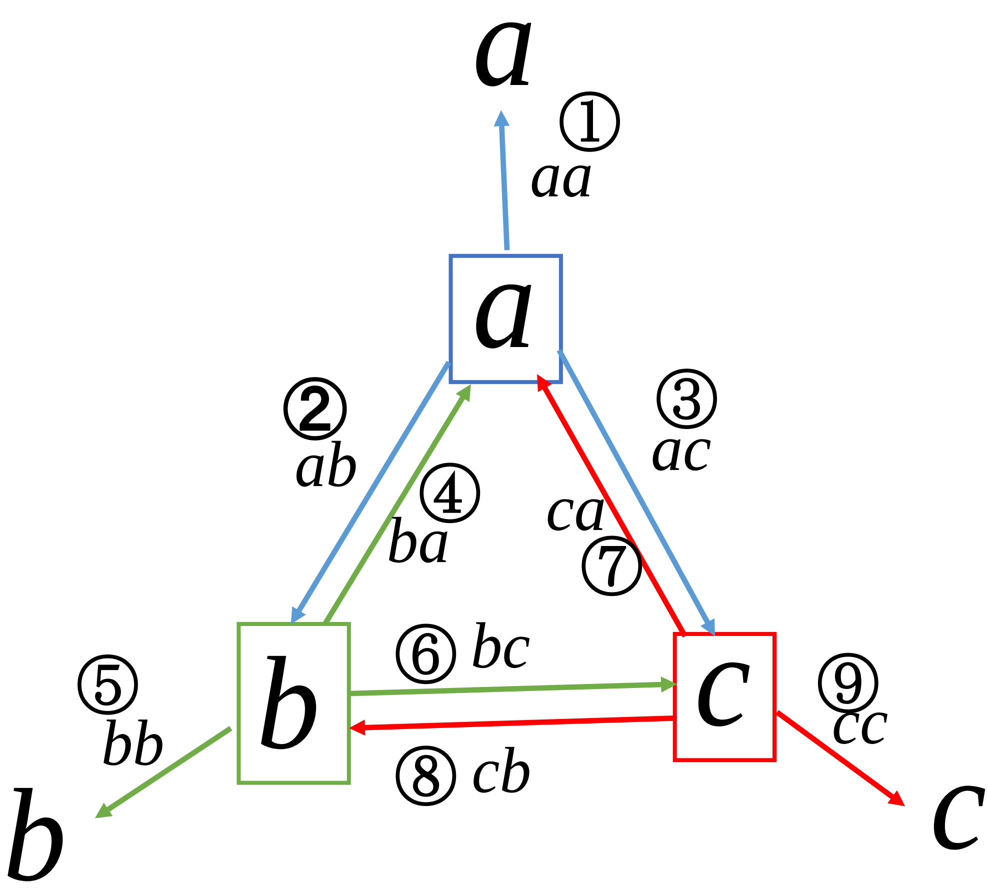
どちらも $(x+p)^2$ にしてみれば同じ $\pm 2^2=4$ という値を取ります。

これが、
放物線のグラフが $x=-p$ なる x 軸に垂直な直線を中心軸として対称になっている正体です。

■もう一つおまけ（他で記載している内容：いつか必要な時があるかもしれません）
$(a+b+c)(a+b+c)$ を展開していくということは？



これを、ちょっと違った風に表せば、



番号と矢印の色を対応させながら、じっくり見てください。

自分自身にかけるのがそれぞれ **1** 回
3 通りのペアの作り方それぞれに対しお互いかけあうのが **2** 回

そう考えれば、
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ ・・・(ア)
なる公式は、計算で確かめることなく出てきます。

移項変形すると、$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$ ・・・(イ)

$a^2 + b^2 + c^2$ は難なく $(a+b+c)^2$ の顔を使って表現できたことになりますよ。

何を言いたいのかというと、今後のためですが、

$a^2 + b^2 + c^2$ と $(a+b+c)^2$ は親戚のようなものということなんですね。
$a^2 + b^2 + c^2$ が出てきても、(イ)の関係式は丸暗記していない限りは出てこないですね。

でもね、上記の 2 項が親戚関係にあることが頭にメモされていれば、(ア)の式を考えるんです。
そうすると、(イ)の式に自然に気が付いちゃうんです。

そして、この式を利用することに何度かお目にかかると、自然に(イ) の式があったなということを覚えちゃうんですね。

(イ)を記号だけで丸暗記しても、何の力にもなっていないんです。
普通の展開の(ア)から、当たり前に出てくる「親戚関係」と認識しておくだけで、暗記しなきゃいけないなんてストレスが一つ減ったことになるのではないでしょうか？